Fiche 001 **Niveau : 0** **Gris**

Série dont les termes sont divisés par la somme partielle

1 Introduction

Le problème qui suit résout une question qu'on peut se poser sur l'espace l^2 des suites de carré sommable : *si une suite $u = (u_n)_n$ est telle que pour toute suite de carré sommable $v = (v_n)_n$ la série $\sum_n u_n v_n$ converge, la suite u est elle de carré sommable ?* La réponse est oui. On donne deux démonstrations. L'une utilise les propriétés de certains types de séries, l'autre un gros outil d'analyse fonctionnelle : le théorème de Banach-Steinhaus. Pour mettre en place la première on a besoin de résulats sur les séries à termes positifs. C'est l'objet de la partie I. La partie II pose le problème, et pour cela on y étudie quelques résultats sur l'espace l^2. Ensuite on présente les deux démonstrations.

2 Problème

I - Étude d'une suite

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite dont les termes sont strictement positifs. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Soit K un nombre réel strictement positif. On se propose d'étudier la convergence de la série de terme général v_n, où :

$$v_n = \frac{u_n}{(S_n)^K}.$$

1) On suppose que la série de terme général u_n est convergente et a pour somme S.

a) Trouver, en fonction de u_n, un équivalent de v_n au voisinnage de $+\infty$.

b) En conclure que la série de terme général v_n est convergente.

2) On suppose que la série de terme général u_n est divergente et que $K = 1$.

a) Conclure dans le cas où v_n ne tendrait pas vers 0.

b) Dans le cas où v_n tendrait vers 0, étudier la nature de la série de terme général $\log(1 - v_k)$ (où $k \geq 2$). En déduire que la série de terme général v_n diverge.

3) On suppose que la série de terme général u_n est divergente et que $0 < K < 1$.

a) Montrer qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $v_n > \frac{u_n}{S_n}$.

b) Conclure.

4) On suppose que la série de terme général u_n est divergente et que $K > 1$.

a) Montrer que :

$$v_n < \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^K}.$$

b) Montrer que la série de terme général v_k converge.

II - Un problème de géométrie des espaces de suites

On note l^2 l'ensemble des suites réelles de carré sommable, c'est-à-dire des suites $(v_n)_{n\geq 1}$ telles que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 < +\infty.$$

1) **Rappels.**

a) Montrer que si les deux suites $u = (u_n)_{n\geq 1}$ et $v = (v_n)_{n\geq 1}$ sont deux éléments de l^2, alors la série de terme général $|u_n v_n|$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2\right).$$

b) Montrer que si les deux suites $u = (u_n)_{n\geq 1}$ et $v = (v_n)_{n\geq 1}$ sont deux éléments de l^2, alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pourra appliquer l'inégalité de la question précédente aux deux suites de terme général

$$\frac{u_n}{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{v_n}{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

c) Montrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les suites réelles et que

$$||u||_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

définit une norme sur l_2.

d) Montrer que l^2 muni de la norme $||.||_2$ est une espace complet.

2) On se propose de démontrer le résultat suivant :

Soit $u = (u_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes strictement positifs telle que pour toute suite $v = (v_n)_{n\geq 1} \in l^2$ la série de terme général $u_n v_n$ converge. Alors $u \in l^2$.

a) Supposons que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 = +\infty$. Posons :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{S_n}.$$

Étudier les convergences des séries de terme général v_n^2 et $u_n v_n$ et en déduire une contradiction.

b) Nous allons donner une autre démonstration basée sur le théorème de Banach-Steinhaus. Pour tout $N > 0$ définissons l'application linéaire T_N de l^2 dans $\mathbb{R}$ par :

$$T_N(v) = \sum_{k=1}^{N} u_k v_k.$$

Montrer que pour tout N, l'application T_N est continue. Calculer la norme de T_N. Montrer que pour tout $v \in l^2$ on a :

$$\sup_{N>1} |T_N(v)| < +\infty.$$

En appliquant le théorème de Banach-Steinhaus conclure que $u \in l^2$.

3 Solution

Partie I

Cette partie sur les suites est un exercice classique qu'on trouve dans la plupart des livres de préparation aux divers concours.

1) avec cette hypothèse $S_n \sim S$.

a) De ce fait, $v_n \equiv \frac{u_n}{S^K}$.

b) Puisque on travaille sur des séries à termes positifs, le fait que v_n soit équivalent au terme général d'une série convergente prouve que la série de terme général v_n est convergente.

2) Maintenant on suppose que la série de terme général u_n diverge et que $K = 1$.

a) Si v_n ne tend pas vers 0 alors la série de terme général v_n diverge.

b) Si v_n tend vers 0. Remarquons que pour $k \geq 2$ on a :

$$1 - v_k = \frac{S_{k-1}}{S_k} > 0.$$

On calcule :

$$\sum_{k=2}^{n} \log(1 - v_k) = \log(u_1) - \log(S_n).$$

La série de terme général $t_n = -\log(1 - v_n)$ est une série à termes positifs qui diverge. Comme $t_n \sim v_n$ on conclut à la divergence de la série de terme général v_n.

En conclusion si la série de terme général u_n diverge et si $K = 1$ alors la série de terme général v_n diverge.

3) Maintenant on suppose que la série de terme général u_n diverge et que $0 < K < 1$.

a) Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $S_n > 1$. Puisque $0 < K < 1$ on a alors pour $n \geq n_0$ l'inégalité

$$S_n^K < S_n.$$

Donc pour $n \geq n_0$,

$$v_n = \frac{u_n}{S_n^K} > \frac{u_n}{S_n}.$$

b) On vient de voir dans 2) que $\frac{u_n}{S_n}$ est le terme général d'une série à termes positifs divergente. Donc la série de terme général v_n diverge.

4) Maintenant on suppose que la série de terme général u_n diverge et que $K > 1$.

a) Remarqons que

$$v_n = \frac{u_n}{S_n^K} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^K} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{S_n^K}.$$

Comme la suite S_n est croissante, on a donc

$$v_n \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^K}.$$

Par sommation des inégalités précédentes on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \leq \int_{S_1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^K}.$$

Comme $K > 1$ l'intégrale de la partie droite converge, ce qui prouve que la série de terme général v_n converge.

Conclusion de la partie I : la série de terme général v_n converge si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

(i) la série de terme général u_n converge ;

(ii) $K > 1$.

Partie II

1) Rappels

a) On a successivement :

$$0 \leq (|u_n| - |v_n|)^2 = u_n^2 + v_n^2 - 2|u_n v_n|,$$
$$2|u_n v_n| \leq u_n^2 + v_n^2,$$
$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}\left(u_n^2 + v_n^2\right).$$

Ceci prouve que la série de terme général $|u_n v_n|$ est convergente et qu'on a l'inégalité attendue.

b) Si l'une des suites est nulle le résultat est vrai. Sinon posons :

$$w_n = \frac{u_n}{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad t_n = \frac{v_n}{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

En appliquant le résultat précédent on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |w_n t_n| \leq 1,$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

c) Si u et v sont deux suites de l^2 alors $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n$ Comme les 3 séries de terme général u_n^2, v_n^2 et $|u_n v_n|$ sont convergentes, on en déduit que la série de terme général $(u_n + v_n)^2$ est convergente. De plus :

$$||u+v||^2 \leq ||u||^2 + ||v||^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n v_n|,$$

ce qui donne en utilisant l'inégalité montrée en b :

$$||u+v||^2 \leq ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||\,||v||,$$

et donc :

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

d) Soit $(u^{(n)})_n$ une suite de Cauchy dans l^2. Notons $u_k^{(n)}$ le terme général de la suite $u^{(n)}$. Écrivons la condition de Cauchy. Pour tout $\epsilon > 0$ il exite $A > 0$ tel que pour tout $m \geq A$ et tout $n \geq A$ on ait :

$$||u^{(n)} - u^{(m)}|| \leq \epsilon,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(u_k^{(n)}-u_k^{(m)}\right)^2\leq\epsilon^2. \quad (1)$$

Pour tout k fixé on a donc :

$$\left|u_k^{(n)}-u_k^{(m)}\right|\leq\epsilon,$$

ce qui prouve que pour tout k la suite $\left(u_k^{(n)}\right)_n$ est une suite de cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite qu'on va appeler u_k. Nous allons montrer que la suite $u=(u_k)_k$ est dans l^2 et que c'est la limite dans l^2 de la suite $(u^{(n)})_n$. Pour cela on utilise de nouveau la condition de Cauchy (1). pour tout $m\geq A$, tout $n\geq A$ et tout $N>1$ on a :

$$\sum_{k=1}^{N}\left(u_k^{(n)}-u_k^{(m)}\right)^2\leq\epsilon^2. \quad (2)$$

Fixons un $n\geq A$ et faisons tendre m vers $+\infty$. Pour tout $N\geq 1$ on obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{N}\left(u_k^{(n)}-u_k\right)^2\leq\epsilon^2. \quad (3)$$

ce qui montre que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(u_k^{(n)}-u_k\right)^2\leq\epsilon^2. \quad (4)$$

Cette dernière inégalité prouve que la suite de terme général $\left(u_k^{(n)}-u_k\right)_k$ est dans l^2 et donc que la suite de terme général u_k qui est la somme des deux suites de l^2 de terme général $(-u_k^{(n)}+u_k)$ et $u_k^{(n)}$ est elle-même dans l^2. Elle prouve en plus, que $||u^{(n)}-u||\leq\epsilon$, ce qui permet de conclure que $(u^{(n)})_n$ converge vers u dans l^2.

2) Soit $u=(u_n)_n$ une suite telle que pour toute suite $v\in l^2$ la série de terme général u_nv_n converge.

a) Supposons que u n'appatienne pas à l^2 et posons $S_n=\sum_{k=1}^n u_k^2$ et $v_n=\frac{u_n}{S_n}$. On a alors :

$$v_n^2=\frac{u_n^2}{\left(\sum_{k=1}^n u_k^2\right)^2}.$$

En vertu des résultats de la partie I,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}v_n^2<+\infty.$$

Donc $(v_n)_n\in l^2$. Mais toujours en vertu de la partie I,

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n^2}{\sum_{k=1}^n u_k^2}=+\infty,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

b) On peut écrire pour tout N :

$$|T_N(v)|=\left|\sum_{k=1}^{N}u_kv_k\right|, \quad (5)$$

$$|T_N(v)| \leq \sum_{k=1}^{N} |u_k v_k|,$$

$$|T_N(v)| \leq \left(\sum_{k=1}^{N} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|T_N(v)| \leq \left(\sum_{k=1}^{N} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2\right),$$

$$|T_N(v)| \leq \left(\sum_{k=1}^{N} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} ||v||.$$

Ceci prouve que T_N est une application linéaire continue de norme

$$||T_N|| \leq \left(\sum_{k=1}^{N} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si on fait le calcul pour la suite particulière $v \in l^2$ définie par $v_k = u_k$ si $k \leq N$ et $v_k = 0$ si $k > N$, on voit que :

$$|T_N(v)| = \left(\sum_{k=1}^{N} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} ||v||,$$

ce qui finit de prouver que :

$$||T_N|| = \left(\sum_{k=1}^{N} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Reprenons l'égalité (5). On en déduit que :

$$\sup_N |T_N(v)| \leq \sup_N \left|\sum_{k=1}^{N} u_k v_k\right|.$$

Mais comme la série $\sum_{k=1}^{N} u_k v_k$ est convergente, ses sommes partielles sont bornées, ce qui montre que :

$$\sup_N |T_N(v)| < +\infty.$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus on a donc :

$$\sup_N ||T_N|| < +\infty,$$

ce qui compte tenu de la valeur de la norme de T_N conduit à :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2 < +\infty.$$

Remarque : La démonstration du fait que l^2 est complet est exemplaire. La démarche est classique :

1. on part d'une suite de Cauchy, et on écrit proprement la condition de Cauchy,

2. ceci permet d'avoir une convergence simple, ce qui pour les suites correspond à une convergence sur chaque composante ; on obtient alors un candidat pour la limite au sens de la norme ;
3. à partir de là on passe à la limite dans la condition de Cauchy, ce qui donne simultanément l'appartenance du candidat retenu à l'espace dont on veut montrer la complétude, et la convergence de la suite initiale, au sens de la norme, vers ce candidat.

Auteur : Robert Rolland
Diffusé par l'Association ACrypTA